



ИНСТИТУТ СОДЕРЖАНИЯ
И МЕТОДОВ ОБУЧЕНИЯ

Федеральное государственное
бюджетное научное учреждение

МЕТОДИЧЕСКИЙ КЕЙС

/МАТЕМАТИКА. 10-11 КЛАССЫ/

МНОГОЧЛЕНЫ ОТ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ. ДЕЛЕНИЕ МНОГОЧЛЕНА НА МНОГОЧЛЕН

АВТОРЫ:



РАСТАШАНСКАЯ
ТАТЬЯНА ВЛАДИМИРОВНА,
к.п.н., начальник управления
педагогического проектирования
ФГБНУ ИСМО



БАРАКОВА
ЕЛЕНА АЛЕКСАНДРОВНА,
к.п.н.
ведущий эксперт ФГБНУ ИСМО

г. Москва
2024г.

Аннотация. Методический кейс направлен на развитие методических компетенций педагогических работников.

Выбор темы кейса обусловлен с одной стороны значимостью навыков действий с многочленами в преобразовании выражений, функций, решении уравнений n – степени, других заданиях, и отсутствием содержания темы «Многочлены» в учебнике «Алгебра и начала математического анализа», 10-11 классы, (базовый и углубленный уровень) авторов Ш.А. Алимов, Ю.М. Колягин и др., – Москва: Просвещение, 2023г. Тем не менее, именно навыки преобразований многочленов, позволяют выполнять наиболее рациональное решение, например уравнений высшей степени, упрощение записи решения, приведение к обоснованному результату. Знания многочленов позволяют выпускникам осуществлять вариативный подход к выполнению заданий, решение задач ЕГЭ по математике профильного уровня, где необходимо изменить внешний вид функции, определить асимптоты (наклонные) (№ 11), с параметрами (№18) или на многочлены (№ 19). На базовом уровне данные знания можно предложить для ознакомления.

Обратимся к федеральной рабочей программе по математике 10 класс, углубленный уровень. В тематическом планировании в разделе «Множество действительных чисел. Многочлены. Рациональные уравнения и неравенства. Системы линейных уравнений» детализировано содержание темы «Многочлены»:

- Многочлены от одной переменной.
- Деление многочлена на многочлен с остатком.
- Теорема Безу.
- Многочлены с целыми коэффициентами.
- Теорема Виета.

Здесь же описаны предметные результаты освоения данной темы обучающимися:

- оперировать понятиями многочлен от одной переменной, его корни;

- применять деление многочлена на многочлен с остатком, теорему Безу и теорему Виета для решения задач.

Предлагаем дополнить данное содержание темой «Схема Горнера», соответственно, предметным умением – применение алгоритма деления многочлена на многочлен по схеме Горнера. Данное умение позволит выполнять деление многочлена на многочлен более рационально в отдельных случаях.

Методические рекомендации

Прежде, чем переходить к объяснению способов деления многочлена на многочлен, нужно актуализировать знания действий с многочленами, изученные в 8 классе и уточнить понятия:

- стандартный вид многочлена ($P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$),
- степень многочлена (многочлен степени n),
- старший член многочлена (a_0x^n),
- свободный член (a_n),
- многочлен нулевой степени ($P(x) = a_0$), нулевой многочлен – число 0.

Из всех арифметических действий, при повторении темы «Многочлены» за курс 8 класса, действие деления многочлена на одночлен нужно повторить в следующем формате:

1 Шаг. Выполним почленное деление в строку:

$$(8x^3 - 4x^2 + 6x) : (-2x) = -4x^2 + x - 3;$$

2 Шаг. Выполним деление уголком;

$$\begin{array}{r}
 - \quad 8x^3 - 4x^2 + 6x \quad \Big| \quad \begin{array}{l} -2x \\ -4x^2 + x - 3 \end{array} \\
 \underline{8x^3} \\
 - \quad -4x^2 \\
 \underline{-4x^2} \\
 - \quad 6x \\
 \underline{6x} \\
 0
 \end{array}$$

Проводим действия деления и запись действий по аналогии деления чисел уголком (на примере деления многочлена на одночлен)

3 Шаг. Разделим уголком многочлен на многочлен, проговаривая компоненты при делении:

$$\begin{array}{r|l}
 \text{ДЕЛИМОЕ} \rightarrow \begin{array}{r} 10x^2 - 7x - 12 \\ \underline{10x^2 + 8x} \\ -15x - 12 \\ \underline{-15x - 12} \\ 0 \end{array} & \begin{array}{l} 5x + 4 \leftarrow \text{ДЕЛИТЕЛЬ} \\ 2x - 3 \leftarrow \text{ЧАСТНОЕ} \end{array}
 \end{array}$$

Актуализируем запись делимого через частное, делитель и остаток:

$$10x^2 - 7x - 12 = (5x + 4)(2x - 3)$$

4 Шаг. Усложняем задачу: предлагаем деление с остатком, отличным от 0. Разделим многочлен, записанный не в стандартном виде $3x + 4x^4 + 1 - 15x^3 + 2x^5 - 9x^2$, на многочлен $2x^2 - x^3$. Запишем исходный многочлен через делитель, частное и остаток.

Замечание: прежде, чем приступить к делению уголком, необходимо оба многочлена привести к стандартному виду:

$$2x^5 + 4x^4 - 15x^3 - 9x^2 + 3x + 1 \quad \text{и} \quad -x^3 + 2x^2$$

Теперь повторяем алгоритм деления по аналогии деления чисел уголком:

$$\begin{array}{r|l}
 \text{ДЕЛИМОЕ} \rightarrow \begin{array}{r} 2x^5 + 4x^4 - 15x^3 - 9x^2 + 3x + 1 \\ \underline{2x^5 - 4x^4} \\ 8x^4 - 15x^3 \\ \underline{8x^4 - 16x^3} \\ x^3 - 9x^2 \\ \underline{x^3 - 2x^2} \\ -7x^2 + 3x + 1 \end{array} & \begin{array}{l} -x^3 + 2x^2 \leftarrow \text{ДЕЛИТЕЛЬ} \\ \underline{-2x^2 - 8x - 1} \\ \text{ЧАСТНОЕ} \uparrow \end{array}
 \end{array}$$

$\leftarrow \text{ОСТАТОК,}$

Следовательно, можем записать результат следующим образом:

$$2x^5 + 4x^4 - 15x^3 - 9x^2 + 3x + 1 = (-x^3 + 2x^2) \cdot (-2x^2 - 8x - 1) - 7x^2 + 3x + 1.$$

Замечание. Степень остатка меньше, чем степень делителя.

5 Шаг. Рассматриваем деление многочлена на многочлен, в случае, когда в делимом один из коэффициентов при одночлене равен 0. Разделим многочлен

$2x^3 - 3x + 5$ на многочлен $x - 4$.

$$\begin{array}{r|l}
 2x^3 + 0x^2 - 3x + 5 & x - 4 \\
 \underline{2x^3 - 8x^2} & \\
 8x^2 - 3x & \\
 \underline{4x^2 - 32x} & \\
 29x + 5 & \\
 \underline{29x - 116} & \\
 121 &
 \end{array}$$

Получим: $2x^3 - 3x + 5 = (x - 4)(2x^2 + 8x + 29) + 121$.

Для того, чтобы подчеркнуть значимость этого навыка, можно предложить обучающимся задачи, которые могут быть одним из действий решения задачи ЕГЭ по математике.

Пример.

При каком наименьшем натуральном значении n выражение $\frac{2n^2 - 13n - 45}{3n - 27}$ является целым числом?

Решение.

$$\begin{array}{r|l}
 2n^2 - 13n - 45 & 3n - 27 \\
 \underline{2n^2 - 18n} & \\
 5n - 45 & \\
 \underline{5n - 45} & \\
 0 &
 \end{array}$$

1) Выполним деление уголком:

2) Подберем наименьшее натуральное n при котором частное от деления числителя на знаменатель будет целым:

при $n = 2$, имеем $\frac{2}{3} \cdot 2 + \frac{5}{3} = \frac{9}{3} = 3$.

Ответ: 3.

Теперь можем предложить это же действие, деление многочлена на двучлен, выполнять по алгоритму, предложенному английским математиком Горнером.

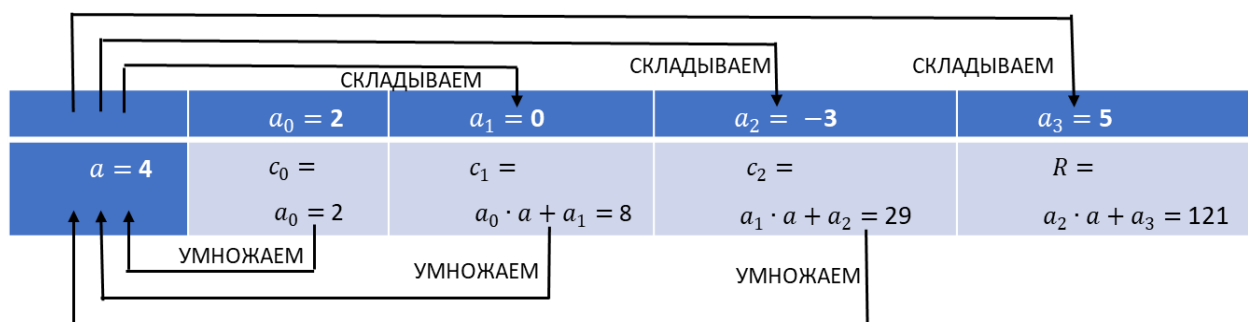
Что важно помнить.

Схема Горнера работает только на деление многочлена на двучлен $(x - a)$.

Продemonстрируем выполнение деления многочлена на двучлен по схеме Горнера на примере, так как эти действия алгоритмизированы и повторяющиеся.

Для объяснения воспользуемся уже разобранным примером деления многочлена на многочлен уголко.

$$(2x^3 - 3x + 5) : (x - 4) = 2x^2 + 8x + 29 \text{ (ост. 121)}$$



После практической подачи схемы Горнера нужно прописать в символьном виде выражения для нахождения коэффициентов частного. Для этого ввести обозначения:

Коэффициенты делимого $(2x^3 - 3x + 5)$: $a_0 = 2$, $a_1 = 0$, $a_2 = -3$, $a_3 = 5$.

Корень делителя, число, которое исключаем из области определения выражения: $a = 4$.

Тогда коэффициенты частного находим по алгоритму:

$$c_0 = a_0, \quad c_1 = a_0 \cdot a + a_1, \quad c_2 = a_1 \cdot a + a_2, \quad c_3 = a_2 \cdot a + a_3 = R - \text{остаток.}$$

Обобщаем формулу нахождения коэффициента отличного от $c_0 = a_0$, в частном от деления многочлена на двучлен, по схеме Горнера:

$$c_{n+1} = a_n \cdot a + a_{n+1}$$

После закрепления техники деления многочлена на двучлен вида $(x - a)$, нужно добавить уточнение: деление многочлена на двучлен вида $(kx - b)$.

Такой двучлен необходимо привести к виду $(x - \frac{b}{k})$. Покажем на примере. Разделим многочлен $(x^3 - x^2 + 2x - 1)$ на двучлен $(2x - 4)$. Но тогда результат будет равен

результату деления многочлена $\frac{1}{2}(x^3 - x^2 + 2x - 1)$ на двучлен $(x - 2)$. Теперь можно применить схему Горнера.

	СКЛАДЫВАЕМ		СКЛАДЫВАЕМ		СКЛАДЫВАЕМ
	$a_0 = \frac{1}{2}$	$a_1 = -\frac{1}{2}$	$a_2 = 1$	$a_3 = -\frac{1}{2}$	
$a = 2$	$c_0 = a_0$ $= \frac{1}{2}$	$c_1 =$ $a_0 \cdot a + a_1 = \frac{1}{2}$	$c_2 =$ $a_1 \cdot a + a_2 = 2$	$R =$ $a_2 \cdot a + a_3 = \frac{7}{2}$	
	УМНОЖАЕМ		УМНОЖАЕМ		УМНОЖАЕМ

Таким образом: $\left(\frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{1}{2}\right) : (x - 2) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 2$ (ост. $\frac{7}{2}$), или в соответствии с условием задачи:

$$(x^3 - x^2 + 2x - 1) : (2x - 4) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 2 \text{ (ост. 7)}.$$

Вот теперь и теорема Безу органично встраивается в содержание темы:

Теорема Безу: «Остаток от деления многочлена $P(x)$ на двучлен $(x - a)$ равен значению этого многочлена при $x = a$. То есть $P(a) = R$.

Проверим на нашем примере эту теорему, найдем $P(2)$.

$$P(2) = 2^3 - 2^2 + 2 \cdot 2 - 1 = 7, \text{ — верно.}$$

Следовательно при решении алгебраического уравнения вида $P_n(x) = 0$, можно применять следствие из теоремы Безу.

Следствие из теоремы Безу: «Для того чтобы многочлен $P_n(x)$ делился на двучлен $(x - a)$, необходимо и достаточно, чтобы, при $x = a$ он обращался в нуль.»

Закрепление теоремы Безу полезно на решении качественных задач. Приведем пример такой задачи.

ЗАДАЧА

«Петя написал в своей тетради многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами и предложил Васе угадать его степень. Вася задал Пете два вопроса: «Чему равно значение многочлена при $x = -3$?» и «Чему равен остаток от деления многочлена на $(x - n)$, где n — его степень?». Получив ответы 1 и 6

соответственно, Вася уверенно назвал степень многочлена. Как он это сделал?
Какова степень многочлена?»

РЕШЕНИЕ

Первое условие можно написать в виде $P(-3) = 1$, для второго получим $P(x) = (x - n) \cdot A(x) + 6$ для некоторого многочлена $A(x)$. Подставляя n , имеем $P(n) = 6$.

Воспользуемся теоремой Безу: $P(n) - P(-3) = 6 - 1 = 5$ кратно $n + 3$.

Поскольку $n \geq 0$, то $n + 3 = 5$ (иначе n — отрицательно), откуда $n = 2$.

Покажем применение этих теоретических фактов в решении уравнения вида

$$P_n(x) = 0.$$

Решим уравнение: $x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 13x + 6 = 0$.

- Найдем значение многочлена, подставляя последовательно делители свободного члена в многочлен. Делители числа 6: $\{\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 6\}$.

$$P(-1) = 1 - 3 - 5 + 13 + 6 \neq 0,$$

$$P(1) = 1 + 3 - 5 - 13 + 6 \neq 0,$$

$$P(-2) = 16 - 24 - 20 + 26 + 6 \neq 0,$$

$$P(2) = 16 + 24 - 20 - 26 + 6 = 0, \text{ — верно.}$$

Делаем вывод, что $x = 2$ — корень уравнения, и выполняем деление многочлена $P_4(x)$ на двучлен $(x - 2)$ по схеме Горнера.

	$a_0 = 1$	$a_1 = 3$	$a_2 = -5$	$a_3 = -13$	$a_4 = 6$
$a = 2$	$c_0 = a_0 = 1$	$c_1 =$ $a_0 \cdot a + a_1 = 5$	$c_2 =$ $a_1 \cdot a + a_2 = 5$	$c_3 =$ $a_2 \cdot a + a_3 = -3$	$R = 0$

Схема Горнера: стрелки "СКЛАДЫВАЕМ" указывают на вычисления в строке c_i (от a_0 к c_1 , от c_1 к c_2 , от c_2 к c_3 , от c_3 к R). Стрелки "УМНОЖАЕМ" указывают на умножение a_i на a (от a_0 к $a_0 \cdot a$, от a_1 к $a_1 \cdot a$, от a_2 к $a_2 \cdot a$, от a_3 к $a_3 \cdot a$).

Получили: $x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 13x + 6 = (x - 2) \cdot (x^3 + 5x^2 + 5x - 3)$;

- Повторяем алгоритм для многочлена $P_3(x) = x^3 + 5x^2 + 5x - 3$.

Делители свободного члена (-3) : $\{\pm 1; \pm 3\}$.

$$P(-1) = -1 + 5 - 5 - 3 \neq 0,$$

$$P(1) = 1 + 5 + 5 - 3 \neq 0,$$

$$P(-3) = -27 + 45 - 15 - 3 = 0, \text{ — верно.}$$

Делаем вывод, что $x = -3$ — корень уравнения, и выполняем деление многочлена $P_3(x)$ на двучлен $(x + 3)$ по схеме Горнера.

	$a_0 = 1$	$a_1 = 5$	$a_2 = 5$	$a_3 = -3$
a $= -3$	$c_0 = a_0 = 1$	$c_1 =$ $a_0 \cdot a + a_1 = 2$	$c_2 =$ $a_1 \cdot a + a_2 = -1$	$R = 0$

Схема Горнера: стрелки "СКЛАДЫВАЕМ" указывают на вычисления в строке c_i (от a_0 к a_1 , от a_1 к a_2 , от a_2 к a_3). Стрелки "УМНОЖАЕМ" указывают на умножение a_i на a (от a_0 к c_1 , от c_1 к c_2 , от c_2 к R).

Получили: $x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 13x + 6 = (x - 2) \cdot (x + 3)(x^2 + 2x - 1)$;

□ Квадратное уравнение $x^2 + 2x - 1 = 0$ решаем по формулам корней квадратного уравнения, через дискриминант.

$$x^2 + 2x - 1 = 0, D = b^2 - 4ac, D = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 8, \sqrt{D} = 2\sqrt{2},$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}, \quad x_{1,2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{2}}{2 \cdot 1} = -1 \pm \sqrt{2}.$$

Итак, корни уравнения: $\{2; -3; -1 - \sqrt{2}; -1 + \sqrt{2}\}$, это и есть ответ.

Замечание. Схему Горнера рационально применять, если уравнение $P_n(x)$ — приведенное, то есть $a_0 = 1$. Кроме того, среди делителей свободного члена есть целый корень уравнения.

В других случаях удобнее пользоваться при решении уравнения n -степени делением уголком.

Последовательное нахождение корней уравнения n -степени, позволяет представить многочлен n -степени в виде произведения множителей вида $(x - x_n)$, где x_n — корни уравнения. Воспользуемся этим обстоятельством для вывода формул Виета.

Другими словами:

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = a_0(x - x_1)(x - x_2)(x - x_1) \dots (x - x_n).$$

Если раскрыть скобки в правой части и приравнять коэффициенты при одинаковых степенях x , многочленов левой и правой частей уравнения, то получим следующее:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n &= -\frac{a_1}{a_0}, \\ x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + \cdots + x_{n-1} \cdot x_n &= \frac{a_2}{a_0}, \\ x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_2 \cdot x_4 + \cdots + x_{n-2} \cdot x_{n-1} \cdot x_n &= -\frac{a_3}{a_0}, \\ &\vdots \\ x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdots x_{n-1} \cdot x_n &= (-1)^n \cdot \frac{a_n}{a_0} \end{aligned}$$

Эти равенства называют формулами Виета.

В таком формате, сразу в символьном виде, формулы Виета сложно воспринимаются школьниками, тем более применяются в решении задач. Имеет смысл актуализировать теорему Виета сначала для решения квадратных уравнений. Затем, постепенно повышая степень уравнения, (то есть после квадратного уравнения обратиться к кубическому, далее к уравнению 4-ой степени, 5-ой степени), перейти к обобщению.

Но это тема уже другого кейса.

На углубленном уровне уже в 8 классе предлагается деление многочлена на многочлен уголком. Покажем на каких заданиях ГИА (ОГЭ) по математике применяется данное содержание.

Тип 20 № **311243** 

Сократите дробь $\frac{5x^2 - 3x - 2}{5x^2 + 2x}$.

Прием разложения квадратного трехчлена на множители с помощью формул корней квадратного трехчлена (по дискриминанту) традиционно работает в таком задании. Но можно предложить и другой подход.

Проверяем, нет ли среди делителей свободного члена квадратного трехчлена его корней?

Делители числа 2: $\{\pm 1; \pm 2\}$.

$P_2(1) = 5 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 - 2 = 0$, – верно, следовательно $x = 1$ – корень.

Выполним деление уголком:

$$\begin{array}{r|l}
 5x^2 - 3x - 2 & x - 1 \\
 \underline{5x^2 - 5x} & 5x + 2 \\
 2x - 2 & \\
 \underline{2x - 2} & \\
 0 &
 \end{array}$$

Выполним условие задачи, сократим дробь: $\frac{5x^2-3x-2}{5x^2+2x} = \frac{(x-1) \cdot (5x+2)}{x \cdot (5x+2)} = \frac{x-1}{x}$.

Тип 22 № 340933 

Постройте график функции $y = \frac{3x^2+14x-5}{x^2+5x}$ и определите, при каких значениях t прямая $y = t$ не имеет с графиком ни одной общей точки.

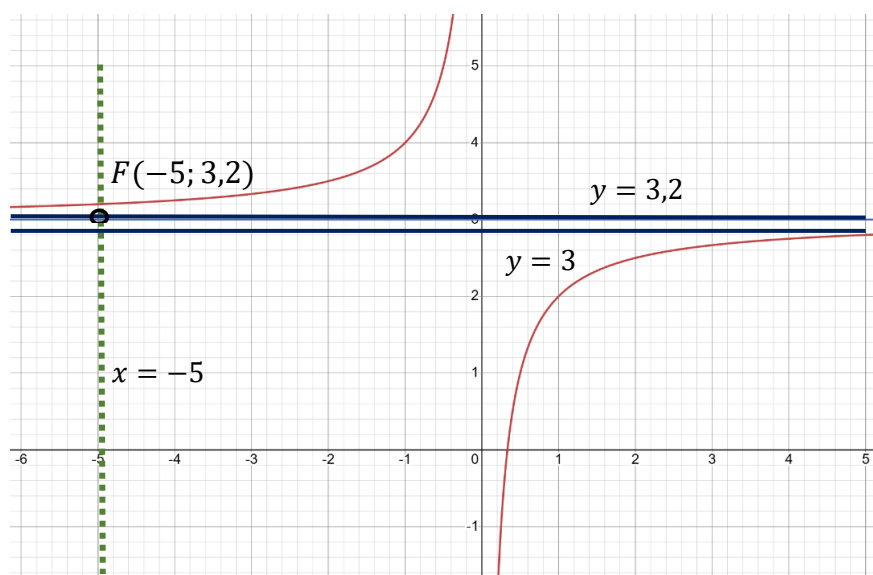
Для построения графика данной функции необходимо преобразовать её внешний вид до «знакомого». Выполним деление уголком числителя на знаменатель:

$$\begin{array}{r|l}
 3x^2 + 14x - 5 & x^2 + 5x \\
 \underline{3x^2 + 15x} & 3 \\
 -x - 5 &
 \end{array}$$

Следовательно, функцию можно записать в следующем виде:

$$y = \frac{3 \cdot (x^2 + 5x) - (x + 5)}{x \cdot (x + 5)} = \frac{(3x - 1) \cdot (x + 5)}{x \cdot (x + 5)} = \frac{3x - 1}{x} = 3 - \frac{1}{x},$$

$$D(y): x \neq 0, x \neq -5.$$



При $t = 3$ и $t = 3,2$ функция $y = t$ не имеет с графиком данной функции ни одной общей точки.

Ответ: 3; 3,2.

Приведем примеры применения содержания темы «Многочлены» в заданиях ГИА (ЕГЭ).

Тип 18

При каких значениях параметра a сумма корней уравнения

$a^4x - 4a^2x + x^2 + a + 5x = 0$ будет наибольшей?

Решение.

- Представим левую часть уравнения (многочлен) в стандартном виде квадратного трехчлена относительно x :

$$\begin{aligned} a^4x - 4a^2x + x^2 + a + 5x &= x^2 + (a^4 - 4a^2 + 5)x + a \\ &= x^2 + ((a^2 - 2)^2 + 1)x + a; \end{aligned}$$

- Составим сумму корней уравнения $x^2 + ((a^2 - 2)^2 + 1)x + a = 0$ (при условии, что корни уравнения есть), по теореме Виета:

$$x_1 + x_2 = -((a^2 - 2)^2 + 1).$$

- Данная сумма будет наибольшей, если $(a^2 - 2)^2 = 0$, или $a^2 - 2 = 0$, то есть $a = \pm\sqrt{2}$.
- Проверим наличие корней при каждом из найденных значений параметров.

- 1) При $a = \sqrt{2}$, уравнение примет вид: $x^2 + x + \sqrt{2} = 0$,
 $D = 1 - 4\sqrt{2} < 0$, — корней нет;
- 2) При $a = -\sqrt{2}$, уравнение примет вид: $x^2 + x - \sqrt{2} = 0$,
 $D = 1 + 4\sqrt{2} > 0$, — корней два.
Ответ: $-\sqrt{2}$.

Для повышения интереса к изучению данной темы предложите обучающимся проект-реферат о жизни и деятельности Ф. Виета, Э. Безу, И. Ньютона, Л. Эйлера. Именно с именами этих ученых связано развитие алгебры уравнений.

Дополнительные интернет-источники

1. Урок 10. Многочлены от одной переменной. Схема Горнера.
<https://resh.edu.ru/subject/lesson/5298/conspect/326968/>
2. Урок 11. Многочлен $P(x)$ и его корень. Алгебраическое уравнение.
<https://resh.edu.ru/subject/lesson/3778/start/158733/>